Álgebra Lineal
Capítulo 11. Tópicos Especiales y Aplicaciones
11.1. Formas cuadráticas y geometría analítica

Mostramos en esta lección una aplicación de las formas cuadráticas a geometría analítica. En el capítulo anterior vimos que toda forma sesquilineal hermintiana puede ser reducida a una suma de cuadrados mediante un cambio de base, o lo que es lo mismo, mediante un cambio de coordenadas. En efecto, sea V es un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita n y q una forma cuadrática sobre V definida por una forma sesquilineal hermitiana f. Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una base cualquiera de V y sea $A = m_X(f)$, entonces sabemos que

$$q(u) = ZAZ^*$$

donde $Z = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ es el vector de coordenadas de u respecto de la base X, es decir, $u = \alpha_1.x_1 + \cdots + \alpha_n.x_n$. Vimos que si $X' = \{x_1', \ldots, x_n'\}$ es la base de V conformada por vectores propios ortonormalizados de A, y C es la matriz de cambio de X a X', es decir, las columnas de C son las coordenadas de los vectores de X' es términos de la base X, entonces q en la base X' es diagonal:

$$q(u) = Z' \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} (Z')^* = \lambda_1 |\alpha_1'|^2 + \cdots + \lambda_n |\alpha_n'|^2$$

donde λ_i son los valores propios de A y $Z' = [\alpha_1', \ldots, \alpha_n']$ es el vector de coordenadas de u respecto de la base X', es decir, $u = \alpha_1'.x_1 + \cdots + \alpha_n'.x_n$. Vimos además que C es unitaria y tal que

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = C^T A \overline{C}$$

es decir, $\left(\overline{C}\right)^{-1} = C^T$. Notemos que con la matriz C se puede expresar el cambio de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Si en particular estamos considerando un caso real, entonces C es una matriz ortogonal y $C^{-1} = C^T$.
Así pues, mediante un cambio de base, o lo que es lo mismo, mediante un cambio de coordenadas inducido por la matriz C de vectores propios ortonormalizados de la matriz A, una forma cuadrática real puede ser reducida a una suma de cuadrados, donde los coeficientes de la suma son los valores propios de A y C es una matriz ortogonal.

a. Cónicas. Usaremos los resultados anteriores para interpretar geométricamente los puntos (x, y) del plano $\mathbb{R}^2$ que satisfacen una ecuación de orden 2 de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (1)$$

Veremos a continuación que el conjunto solución de (1) es alguna de las siguientes curvas:
(a) Una elipse
(b) Una hipérbola
(c) Una parábola
(d) Vacío
(e) Un punto
(f) Una recta
(g) Dos rectas
Consideremos en (1) la parte cuadrática $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, esta es una forma cuadrática con matriz simétrica real

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

calculada en la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Mediante la matriz C de vectores propios ortonormalizados podemos reducir q a una suma de cuadrados con el respectivo cambio de coordenadas, digamos x', y'. De esta manera, la ecuación (1) se transforma en otra de la siguiente forma

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0 \qquad (2)$$

donde λ_1, λ_2 son los valores proopios de A y $d', e', f' \in \mathbb{R}$. Notemos que λ_1, λ_2 determinan que tipo de curva es la solución de (1):
(i) si $\lambda_1\lambda_2 > 0$, entonces λ_1, λ_2 son del mismo signo y tenemos en este caso una elipse, un punto o vacío.
(ii) Si $\lambda_1\lambda_2 < 0$, entonces $\lambda_1\lambda_2$ son de signo contrario y tenemos en este caso una hipérbola, o dos rectas.
(iii) Si $\lambda_1 = 0$ pero $\lambda_2 \neq 0$ ó bien $\lambda_1 \neq 0$ pero $\lambda_2 = 0$, entonces tenemos una parábola, una recta, o vacío.
(iv) Si $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ entonces $A = 0$ y tenemos una recta o vacío.
Finalmente, calculemos el polinomio característico de A:

$$p_A(z) = \begin{bmatrix} z - a & -\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & z - c \end{bmatrix}$$

, determinant: $ac - az - cz - \frac{1}{4}b^2 + z^2 = z^2 - (a + c)z + \left(ac - \frac{1}{4}b^2\right) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$, por lo tanto

$$\lambda_1\lambda_2 = \left(ac - \frac{1}{4}b^2\right).$$

$4ac - b^2$ se conoce como el **discriminante** de la forma cuadrática q y determina el tipo de cónica que representa la ecuación (1).

Ejemplo 1. Determinar la cónica definida por la ecuación

$$19x^2 + 4xy + 16y^2 - 212x + 104y = 356 \qquad (3)$$

Mostrar los cambios de coordenadas realizados.

Solución. Consideremos la cuadrática asociada a esta curva:

$$19x^2 + 4xy + 16y^2$$

Su discriminante es $4ac - b^2 = 4 \times 19 \times 16 - 16 = 1200 > 0$, por lo tanto tenemos una elipse, un punto o vacío. Su matriz simétrica es

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

Calculemos la matriz diagonalizante conformada por los vectores propios de A normalizados: $E(15) =< (-1, 2) >$ y $E(20) =< (2, 1) >$, notemos que efectivamente $\lambda_1\lambda_2 = \left(ac - \frac{1}{4}b^2\right)$; normalizamos ahora los vectores propios:

$$\|(-1, 2)\| = \sqrt{5}$$
$$\|(2, 1)\| = \sqrt{5}$$

Por lo tanto,

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Las nuevas coordenadas (x', y') están relacionadas con las coordenadas iniciales (x, y) en la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que queremos expresar (3) en forma cartesiana a través de las nuevas coordenadas, entonces

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

es decir,

$$x = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-x' + 2y'\right)$$
$$y = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(2x' + y'\right)$$

Reemplazando en (3) se tiene

$$19\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-x' + 2y'\right)\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-x' + 2y'\right)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x' + y'\right)\right) +$$
$$16\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x' + y'\right)\right)^2 - 212\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-x' + 2y'\right)\right) + 104\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x' + y'\right)\right) = 356$$

$$15(x')^2 + 20(y')^2 + 84x'\sqrt{5} - 64y'\sqrt{5} = 356$$

Podemos ahora completar cuadrados

$$15\left((x')^2 + \frac{84\sqrt{5}}{15}x'\right) + 20\left((y')^2 - \frac{64\sqrt{5}}{20}y'\right) = 356$$

$$15\left(x' + \frac{14}{\sqrt{5}}\right)^2 + 20\left(y' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1200$$

Podemos asegurar que tenemos una elipse. Al realizar un nuevo cambio de coordenadas mediante una traslación,

$$x'' = x' + \frac{14}{\sqrt{5}}$$

$$y'' = y' - \frac{8}{\sqrt{5}},$$

la ecuación (3) en este nuevo sistema de coordenadas se transforma en

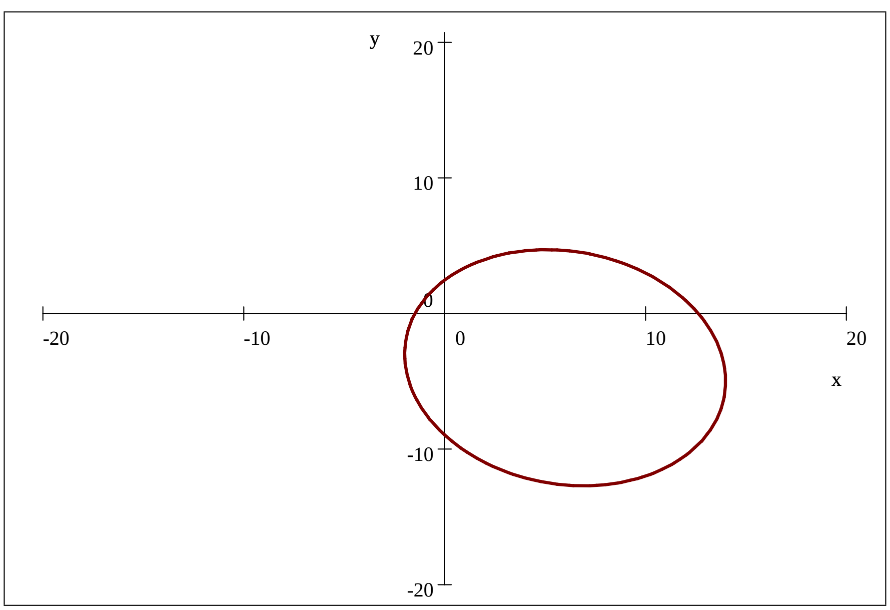
$$15\left(x''\right)^2 + 20\left(y''\right)^2 = 1200.$$

Notemos que el centro de la elipse en el sistema original de coordenadas es

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-x' + 2y'\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\left(-\frac{14}{\sqrt{5}}\right) + 2\frac{8}{\sqrt{5}}\right) = 6$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x' + y'\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\left(-\frac{14}{\sqrt{5}}\right) + \frac{8}{\sqrt{5}}\right) = -4.$$

La gráfica es



Ejemplo 2. Determinar la cónica definida por la ecuación

$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 12 = 0 \qquad (4)$$

Mostrar los cambios de coordenadas realizados.
Solución. La forma caudrática asociada es

$$q(u) = x^2 + 4xy - 2y^2$$

Su discriminante es $4ac - b^2 = -24 < 0$, por lo tanto tenemos una hipérbola o dos rectas. Su matriz simétrica es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Los valores y vectores propios son $E(2) =< (2,1) >, E(-3) =< (-1,2) >$, con norma

$$\|(2,1)\| = \sqrt{5}$$
$$\|(-1,2)\| = \sqrt{5}$$

luego la matriz de cambio es

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

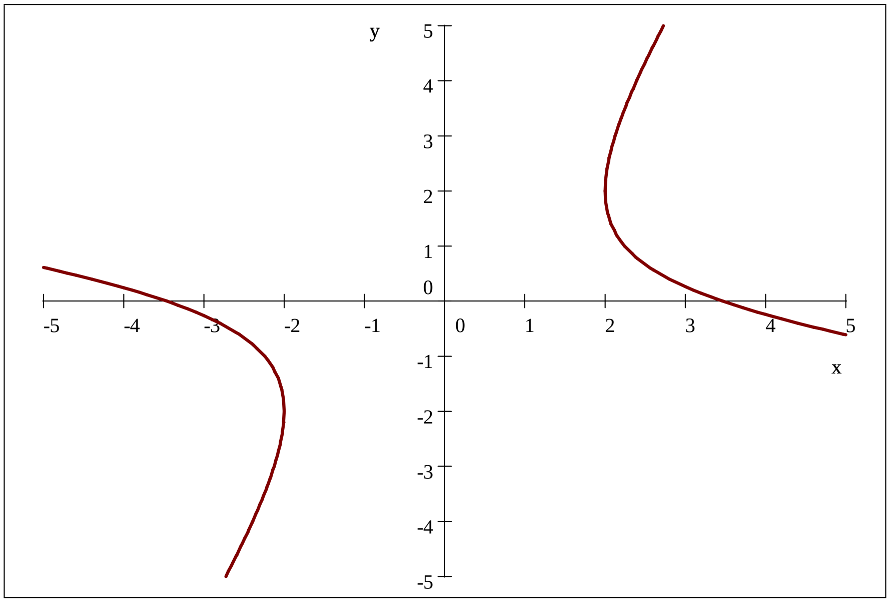
es decir,

$$x = \tfrac{1}{\sqrt{5}} (2x' - y')$$
$$y = \tfrac{1}{\sqrt{5}} (x' + 2y')$$

Reemplazando en (4) encontramos

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} (2x' - y') \right)^2 + 4 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (2x' - y') \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (x' + 2y') \right) - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (x' + 2y') \right)^2 - 12 = 0$$
$$2(x')^2 - 3(y')^2 = 12$$

Notemos que el centro de la hipérbola en el sistema original de coordenadas es $(0,0)$. La gráfica es



Ejemplo 3. Determinar la cónica definida por la ecuación

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 52x + 14y = 6 \qquad (5)$$

Mostrar los cambios de coordenadas realizados.
Solución. La cuadrática asociada es

$$q(u) = 9x^2 + 24xy + 16y^2$$

con discriminante $4ac - b^2 = 0$, por lo tanto tenemos una parábola, una recta o vacío.
La matriz simétrica asociada es

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

con valores y vectores propios $E(0) =< (-4,3) >, E\,(25) =< (3,4) >$; normalizando

$$\|(-4,3)\| = 5$$
$$\|((3,4))\| = 5$$

por lo tanto la matriz de cambio es

$$C = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

y el cambio correspondiente de coordenadas es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

es decir

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{5}\left(-4x' + 3y'\right) \\
y &= \frac{1}{5}\left(3x' + 4y'\right)
\end{aligned}
$$

Reemplazando en (5) se tiene que

$$
\begin{gathered}
9\left(\frac{1}{5}\left(-4x' + 3y'\right)\right)^2 + 24\left(\frac{1}{5}\left(-4x' + 3y'\right)\right)\left(\frac{1}{5}\left(3x' + 4y'\right)\right) + \\
16\left(\frac{1}{5}\left(3x' + 4y'\right)\right)^2 - 52\left(\frac{1}{5}\left(-4x' + 3y'\right)\right) + 14\left(\frac{1}{5}\left(3x' + 4y'\right)\right) = 6
\end{gathered}
$$

es decir,

$$
25(y')^2 - 20y' + 50x' = 6
$$

Completando cuadrados tenemos

$$
\begin{aligned}
5(y')^2 - 4y' + 10x' &= \frac{6}{5} \\
5\left[(y')^2 - \frac{4}{5}y'\right] + 10x' &= \frac{6}{5} \\
\left[(y')^2 - \frac{4}{5}y'\right] + 2x' &= \frac{6}{25} \\
\left((y')^2 - \frac{4}{5}y' + \frac{4}{25}\right) + 2x' &= \frac{6}{25} + \frac{4}{25} \\
\left(y' - \frac{2}{5}\right)^2 + 2x' &= \frac{2}{5} \\
\frac{1}{2}\left(y' - \frac{2}{5}\right)^2 + x' &= \frac{1}{5} \\
x' - \frac{1}{5} &= -\frac{1}{2}\left(y' - \frac{2}{5}\right)^2
\end{aligned}
$$

Tenemos pues una parábola. Mediante la traslación

$$
\begin{aligned}
x'' &= x' - \frac{1}{5} \\
y'' &= y' - \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

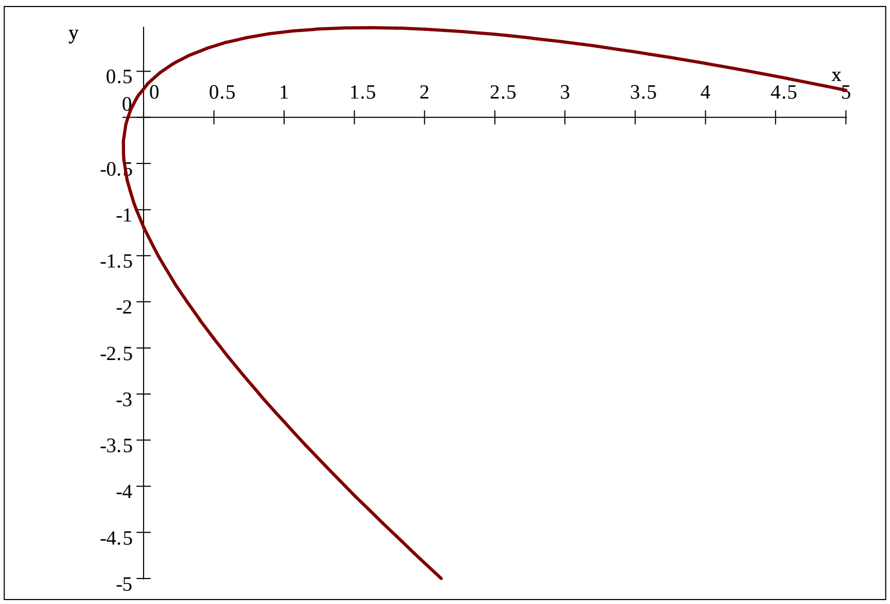
resulta entonces

$$
x'' = -\frac{1}{2}\left(y''\right)^2
$$

Notemos que el vértice de la parábola original está en el punto

$$x = \frac{1}{5}\left(-4\left(\frac{1}{5}\right) + 3\left(\frac{2}{5}\right)\right) = \frac{2}{25}$$
$$y = \frac{1}{5}\left(3\left(\frac{1}{5}\right) + 4\left(\frac{2}{5}\right)\right) = \frac{11}{25}$$

La gráfica de (5) es



El ángulo θ de rotación de los ejes viene dado por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

es decir,

$$x = x'\cos\theta - y' sen\theta$$
$$y = x' sen\theta + y'\cos\theta$$

Notemos que en general,

$$\tan(2\theta) = \frac{b}{a-c} \qquad (6)$$

En efecto, reemplazando las identidades anteriores en (1) se tiene que el coeficiente para el término $x'y'$ debe ser nulo, pero en el reemplazo este coeficiente es

$$csen(2\theta) + b\cos(2\theta) - asen(2\theta) = 0$$

y de esto resulta (6).
En el Ejemplo 1 se tiene que

$$\tan(2\theta) = \frac{4}{3}.$$