**Álgebra Lineal**
**Capítulo 11. Tópicos Especiales y Aplicaciones**
**11.2. Inversa generalizada**

Definimos en esta lección la inversa generalizada de una matriz rectangular real cualquiera, probamos algunas propiedades, mostramos una manera de calcularla y finalmente mostramos una aplicación.
Para definir la inversa generalizada necesitamos algunos preliminares.
**Proposición 1.** (i) Sea $B \in M_{mk}(\mathbb{R})$ una matriz real, entonces

$$rank\left(B^T B\right) = rank\,(B)\,.$$

(ii) Sea $C \in M_{kn}(\mathbb{R})$ una matriz real, entonces

$$rank\left(CC^T\right) = rank\,(C)\,.$$

*Demostración.* Basta probar que $\ker\left(B^T B\right) = \ker(B)$. Sea $X \in \ker\left(B^T B\right)$, entonces $B^T BX = 0$, luego $X^T B^T BX = 0$, de donde $(BX)^T (BX) = 0$, por lo tanto, $BX = 0$, es decir, $X \in \ker(B)$. Recíprocamente, si $X \in \ker(B)$ entonces $BX = 0$ y $B^T BX = 0$, es decir, $X \in \ker\left(B^T B\right)$.$\square$
**Proposición 2.** Sea $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz real tal que $rank\,(A) = k \geq 1$. Entonces existen matrices $B \in M_{mk}(\mathbb{R})$ y $C \in M_{kn}(\mathbb{R})$ tales que

$$A = BC, \text{ y además } rank\,(B) = k = rank(C).$$

*Demostración.* Por medio de operaciones elementales sobre las filas de $A$ podemos encontrar una matriz invertible $T^{-1}$ tal que $T^{-1}A$ es escalonada con $k$ filas no nulas; de igual forma, por medio de operaciones elementales sobre las columnas de $T^{-1}A$ podemos encontrar una matriz $Q^{-1}$ tal que $T^{-1}AQ^{-1}$ es de la forma

$$T^{-1}AQ^{-1} = \begin{bmatrix} E_{k,k} & O_{k,n-k} \\ O_{m-k,k} & O_{m-k,n-k} \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces que

$$A = T \begin{bmatrix} E_{k,k} & O_{k,n-k} \\ O_{m-k,k} & O_{m-k,n-k} \end{bmatrix} Q$$

luego

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} T_{k,k} & T_{k,m-k} \\ T_{m-k,k} & T_{m-k,m-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k,k} & O_{k,n-k} \\ O_{m-k,k} & O_{m-k,n-k} \end{bmatrix} Q \\
&= \begin{bmatrix} T_{k,k} & O_{k,n-k} \\ T_{m-k,k} & O_{m-k,n-k} \end{bmatrix} Q \\
&= \begin{bmatrix} T_{k,k} & O_{k,n-k} \\ T_{m-k,k} & O_{m-k,n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{k,k} & Q_{k,n-k} \\ Q_{n-k,k} & Q_{n-k,n-k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T_{k,k}Q_{k,k} & T_{k,k}Q_{k,n-k} \\ T_{m-k,k}Q_{k,k} & T_{m-k,k}Q_{k,n-k} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}
&A_{11} = T_{k,k}Q_{k,k}, A_{12} = T_{k,k}Q_{k,n-k} \\
&A_{21} = T_{m-k,k}Q_{k,k}, A_{22} = T_{m-k,k}Q_{k,n-k},
\end{aligned}$$

Salvo permutación de filas y columnas podemos asumir que $A_{11}$ es invertible de orden $k \times k$. En efecto, como $T$ es invertible entonces

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} T_{k,k} & T_{k,m-k} \\ T_{m-k,k} & T_{m-k,m-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k,k} & O_{k,n-k} \\ O_{m-k,k} & O_{m-k,n-k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T_{k,k} & O_{k,n-k} \\ T_{m-k,k} & O_{m-k,n-k} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

es de rango $k$, luego podemos intercambiar las filas de esta matriz y suponer que $T_{k,k}$ es invertible. De igual manera, salvo permutación de columnas, $Q_{k,k}$ es invertible, con lo cual $A_{11}$ es invertible.
Hemos demostrado que si $P$ y $R$ son productos de matrices de permutación, entonces

$$PAR = B'C'$$

donde

$$B' = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} E_{k,k} & A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$A = BC$$

donde $B = P^{-1}B'$ y $C = C'R^{-1}$ cumplen las condiciones de la proposición.$\square$
**Definición 1.** Sea $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz real tal que $rank\,(A) = k \geq 1$, y sean $B, C$ como en la proposición anterior. Definimos

$$A^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}$$

$A^{+}$ es una matriz real de tamaño $n \times m$ y tiene las siguientes propiedades básicas, las cuales se verifican directamente de la definición.
**Proposición 3.** (i) $A^{+}AA^{+} = A^{+}$
(ii) $AA^{+}A = A$
(iii) $AA^{+}$ es simétrica
(iv) $A^{+}A$ es simétrica.
Las propiedades anteriores caracterizan la matriz $A^{+}$ tal como veremos a continuación.
**Proposición 4.** Si $A'$ es una matriz real de orden $n \times m$ tal que
(i)' $A'AA' = A'$
(ii)' $AA'A = A$
(iii)' $AA'$ es simétrica
(iv)' $A'A$ es simétrica
entonces $A' = A^{+}$.
*Demostración.* Se tiene

$$\begin{aligned} AA' &= \left(AA^{+}A\right)A' \qquad \text{por (ii)} \\ &= \left(AA^{+}AA'\right)^{T} \qquad \text{por (iii)'} \\ &= \left(AA'\right)^{T}\left(AA^{+}\right)^{T} \\ &= AA'AA^{+} \qquad \text{por (iii)' y (iii)} \\ &= AA^{+} \qquad \text{por (ii)'.} \end{aligned}$$

De igual manera, usando (ii), (ii)',(iv),y (iv)' se tiene que

$$\begin{aligned} A'A &= A'\left(AA^{+}A\right) \\ &= \left(A'AA^{+}A\right)^{T} \\ &= \left(A^{+}A\right)^{T}\left(A'A\right)^{T} \\ &= A^{+}AA'A \\ &= A^{+}A. \end{aligned}$$

De las dos identidades probadas y usando (i) y (i)' resulta

$$\begin{aligned} A^{+} &= A^{+}AA^{+} \\ &= A'AA^{+} \\ &= A'AA' \\ &= A'.\square \end{aligned}$$

**Definición 2.** La matriz $A^+$ caracterizada por las 4 propiedades de la proposición anterior se denomina la inversa generalizada de $A$.
Otras propiedades de la inversa generalizada son las siguientes.
**Proposición 5.** (i) $rank\,(A^+) = rank\,(A)$
(ii) $(\lambda A^+) = \frac{1}{\lambda}A^+$, para $\lambda \neq 0$
(iii) $(A^+)^T = \left(A^T\right)^+$
(iv) $(A^+)^+ = A$
(v) $A$ es simétrica si y sólo si $A^+$ es simétrica
(vi) Si $A$ es invertible, entonces $A^+ = A^{-1}$.
(vii) $0^+ = 0$.
*Demostración.* Todas las propiedades se prueban directamente, veamos por ejemplo la prueba de (i): $rank\,(A^+) = rank\,(A^+AA^+) \leq rank\,(A^+A) \leq rank\,(A)$, también $rank\,(A) = rank\,(AA^+A) \leq rank\,(A^+A) \leq rank\,(A^+)$.
(vi) Si $A$ es invertible una descomposición de $A$ es $A = AE$, luego $A^+ = E^T\left(EE^T\right)^{-1}\left(A^TA\right)^{-1}A^T = A^{-1}\left(A^T\right)^{-1}A^T = A^{-1}$.$\square$
La descomposición de la Proposición 2 da un método para calcular la inversa generalizada de una matriz rectangular $A$.
**Ejemplo 1.** Calcular la inversa generalizada de

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

*Solución.* En este caso $A$ es de rango 2 y además

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

es también de rango 2, por lo tanto

$$A = BC$$

con

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
A^+ &= C^T \left(CC^T\right)^{-1} \left(B^T B\right)^{-1} B^T \\
&= \begin{bmatrix} \frac{11}{17} & -\frac{7}{17} \\ -\frac{7}{17} & \frac{6}{17} \\ -\frac{4}{17} & \frac{1}{17} \\ -\frac{1}{17} & -\frac{4}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{5}{34} & -\frac{3}{17} & \frac{1}{34} & -\frac{1}{34} & \frac{3}{17} & \frac{5}{34} \\ \frac{4}{51} & \frac{13}{102} & -\frac{5}{102} & \frac{5}{102} & -\frac{13}{102} & -\frac{4}{51} \\ \frac{7}{102} & \frac{5}{102} & \frac{1}{51} & -\frac{1}{51} & -\frac{5}{102} & -\frac{7}{102} \\ \frac{1}{17} & -\frac{1}{34} & \frac{3}{34} & -\frac{3}{34} & \frac{1}{34} & -\frac{1}{17} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{102} \begin{bmatrix} -15 & -18 & 3 & -3 & 18 & 15 \\ 8 & 13 & -5 & 5 & -13 & -8 \\ 7 & 5 & 2 & -2 & -5 & -7 \\ 6 & -3 & 9 & -9 & 3 & -6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Podemos comprobar resultado:

$$
\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{102} \begin{bmatrix} -15 & -18 & 3 & -3 & 18 & 15 \\ 8 & 13 & -5 & 5 & -13 & -8 \\ 7 & 5 & 2 & -2 & -5 & -7 \\ 6 & -3 & 9 & -9 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}
$$

**Ejemplo 2.** Sea $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ y sean $P$ y $R$ permutaciones de orden $m$ y $n$ respectivamente. Si $S = PAR$, entonces

$$A^+ = RS^+P$$

En efecto, sea $A = BC$ con $B \in M_{mk}(\mathbb{R}), C \in M_{kn}(\mathbb{R})$ ambas de rango $k$. Notemos entonces que $S$ es también de rango $k$ y una factorización de $S$ es $S = (PB)(CR)$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} S^{+} &= (CR)^{T}\left(CR\,(CR)^{T}\right)^{-1}\left((PB)^{T}(PB)\right)^{-1}(PB)^{T} \\ &= R^{T}C^{T}\left(CRR^{T}C^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}P^{T}PB\right)^{-1}B^{T}P^{T} \\ &= RC^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(B^{T}B\right)^{-1}B^{T}P \\ &= RA^{+}T \end{aligned}$$

luego $RS^{+}T = RRA^{+}TT = A^{+}$.

**Ejemplo 3.** Calcular la inversa generalizada de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 18 \\ -2 & -3 & 3 & -5 & -12 \end{bmatrix}$$

*Solución.* Notemos que $rank\,(A) = 3$, pero el bloque superior izquierdo de orden 3 tiene rango 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Debemos entonces aplicar el ejemplo anterior y permutar filas y/o columnas para ubicar el bloque $A_{11}$ invertible. La forma escalonada reducida de la matriz $A$ nos identifica las filas y columnas apropiadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Debemos entonces considerar las tres primeras filas y las columnas 1, 2 y 4:

$$AR = S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & 15 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 18 \\ -2 & -3 & -5 & 3 & -12 \end{bmatrix}$$

donde $R = P_{34}$. Según el Ejemplo 2, debemos calcular $S^{+}$ y luego obtener $A^{+} = RS^{+}$. Entonces,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

luego

$$S = MN$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} E_3 & S_{11}^{-1} S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene pues que

$$\begin{aligned} S^{+} &= N^T \left( N N^T \right)^{-1} \left( M^T M \right)^{-1} M^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{86}{1265} & \frac{81}{1265} & 0 \\ \frac{81}{1265} & \frac{91}{1265} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{9}{55} & \frac{4}{55} & 0 \\ \frac{228}{1265} & \frac{303}{1265} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{14}{3} & -\frac{19}{3} & 7 & \frac{5}{3} \\ \frac{23}{6} & \frac{31}{6} & -\frac{11}{2} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{109}{1518} & -\frac{757}{7590} & \frac{313}{2530} & \frac{106}{3795} \\ -\frac{35}{1518} & -\frac{257}{7590} & \frac{133}{2530} & \frac{41}{3795} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{16}{33} & -\frac{109}{165} & \frac{41}{55} & \frac{29}{165} \\ \frac{39}{506} & \frac{243}{2530} & -\frac{141}{2530} & -\frac{24}{1265} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Debemos ahora intercambiar la 3 y la 4 filas:

$$\begin{aligned} A^{+} &= \begin{bmatrix} -\frac{109}{1518} & -\frac{757}{7590} & \frac{313}{2530} & \frac{106}{3795} \\ -\frac{35}{1518} & -\frac{257}{7590} & \frac{133}{2530} & \frac{41}{3795} \\ -\frac{16}{33} & -\frac{109}{165} & \frac{41}{55} & \frac{29}{165} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{39}{506} & \frac{243}{2530} & -\frac{141}{2530} & -\frac{24}{1265} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{7590} \begin{bmatrix} -545 & -757 & 939 & 212 \\ -175 & -257 & 399 & 82 \\ -3680 & -5014 & 5658 & 1334 \\ -3795 & -3795 & 3795 & 0 \\ 585 & 729 & -423 & -144 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente vamos a comprobar la respuesta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 18 \\ -2 & -3 & 3 & -5 & -12 \end{bmatrix} \frac{1}{7590} \begin{bmatrix} -545 & -757 & 939 & 212 \\ -175 & -257 & 399 & 82 \\ -3680 & -5014 & 5658 & 1334 \\ -3795 & -3795 & 3795 & 0 \\ 585 & 729 & -423 & -144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 18 \\ -2 & -3 & 3 & -5 & -12 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 18 \\ -2 & -3 & 3 & -5 & -12 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 4.** Si $B \in M_{m_k}(\mathbb{R})$ y $rank\,(B) = k$, entonces

$$B^+ = \left(B^T B\right)^{-1} B^T$$

De igual manera, si $C \in M_{kn}(\mathbb{R})$ y $rank\,(C) = k$, entonces

$$C^+ = C^T \left(CC^T\right)^{-1}$$

En efecto, $B = BE$ y por lo tanto $B^+ = E^T \left(EE^T\right)^{-1} \left(B^T B\right)^{-1} B^T = \left(B^T B\right)^{-1} B^T$.
También, $C = EC$, luego $C^+ = C^T \left(CC^T\right)^{-1} \left(E^T E\right)^{-1} E^T = C^T \left(CC^T\right)^{-1}$.
De lo anterior se tiene que

$$A^+ = C^+ B^+.$$