Álgebra Lineal
Capítulo 11. Tópicos Especiales y Aplicaciones
11.3. Ecuaciones diferenciales

En esta lección mostramos algunas aplicaciones del álgebra lineal a las ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes y a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

a. Ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes.

Sea $V = C^{\infty}(a, b)$ el espacio de las funciones de (a, b) en $\mathbb{R}$ cuyas derivadas de cualquier orden son continuas. Consideremos el operador lineal de derivación

$$D : V \to V.$$

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ un polinomio con coeficientes reales el cual se puede *factorizar completamente en* $\mathbb{R}$ en la forma

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} \cdots (x - \alpha_k)^{r_k},$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq r_i \leq n$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq k \leq n$ y sea

$$p(D) = a_0 I_v + a_1 D + \cdots + a_{n-1}D^{n-1} + D^n = (D - \alpha_1 I_V)^{r_1} \cdots (D - \alpha_k I_V)^{r_k}$$

la transformación polinomial correspondiente. El núcleo de $p(D)$ se conoce como el espacio solución de la ecuación diferencial ordinaria homogenea

$$a_0 y + a_1 y^{(1)} + \cdots + a_{n-1}y^{(n-1)} + y^{(n)} = 0, \qquad (1)$$

donde $y^{(k)}$ denota la derivada de orden k de la función $y = f(x) \in V$. Puesto que $W = \ker(p(D))$ es D-invariante, entonces podemos redefinir D como una transformación de W en W:

$$D : W \to W,$$

de tal forma que $p(x)$ se anula en este nuevo operador D. Queremos demostrar que la dimensión del espacio W es n. Según anotamos después de la demostración del teorema de descomposición irreducible, las partes a) y b) de dicho teorema son válidas para espacios de dimensión infinita y para polinomios que se anulen en la transformación. Por lo tanto, el espacio W se descompone en la forma

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

donde $W_i = N[(D - \alpha_i I_W)^{r_i}]$, $1 \leq i \leq k$. Visto de esta manera, cada solución $y = f(x)$ de la ecuación diferencial (1) se puede expresar de manera única en la forma

$$f(x) = f_1(x) + \cdots + f_k(x),$$

donde $f_i(x) \in W_i \,, 1 \leq i \leq k$. Mejor aun, reuniendo bases de $W_1, \ldots, W_k$ obtenemos una base de W.
El problema entonces se reduce a encontrar el espacio solución de ecuaciones diferenciales de la forma

$$(D - \alpha I)^r y = 0 \qquad (2).$$

Mediante inducción sobre r se puede probar facilmente que

$$(D - \alpha I)^r y = 0 \Leftrightarrow D^r(e^{-\alpha x} y) = 0.$$

En efecto, para $r = 1$ se tiene que si $(D - \alpha I)y = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \alpha y \Rightarrow \\
\frac{dy}{y} &= \alpha dx \Rightarrow \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \alpha dx \Rightarrow \\
\ln(y) &= \alpha x + c \Rightarrow \\
e^{\ln(y)} &= e^{\alpha x + c} \Rightarrow \\
y &= b e^{\alpha x},\, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \\
\frac{d\left(e^{-\alpha x} y\right)}{dx} &= \frac{d(b)}{dx} = 0
\end{aligned}$$

Es decir, $D(e^{-\alpha x} y) = 0$.
Recíprocamente, si $D(e^{-\alpha x} y) = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha x} Dy - y \alpha e^{-\alpha x} &= 0 \Rightarrow \\
Dy - y\alpha &= 0 \Rightarrow \\
(D - \alpha I)\, y &= 0
\end{aligned}$$

Supongamos que (2) es cierta para r y sea $(D - \alpha I)^{r+1} y = 0$, entonces $(D - \alpha I)^r \left((D - \alpha I)\, y\right) = 0$; sea $z = (D - \alpha I)\, y$, entonces $(D - \alpha I)^r z = 0$, y por inducción se tiene que $D^r(e^{-\alpha x} z) = 0$. Por lo tanto, $D^r(e^{-\alpha x} \left((D - \alpha I)\, y\right)) = 0$, es decir, $D^r(e^{-\alpha x} Dy - \alpha e^{-\alpha x} y) = 0$. Puesto que D^r es un operador lineal entonces se tiene que $D^r \left(e^{-\alpha x} Dy\right) - \alpha D^r \left(e^{-\alpha x} y\right) = 0$. Pero notemos que

$$D^{r+1}\left(e^{-\alpha x} y\right) = D^r\left(D\left(e^{-\alpha x} y\right)\right) = D^r\left(e^{-\alpha x} Dy - \alpha y e^{-\alpha x}\right) = D^r\left(e^{-\alpha x} Dy\right) - \alpha D^r\left(y e^{-\alpha x}\right),$$

es decir, que $D^{r+1}\left(e^{-\alpha x} y\right) = 0$.
Recíprocamente, supongamos que $D^{r+1}\left(e^{-\alpha x} y\right) = 0$, entonces como acabamos de ver se tiene que $D^r\left(e^{-\alpha x} Dy\right) - \alpha D^r\left(y e^{-\alpha x}\right) = 0$, es decir, $D^r\left(e^{-\alpha x} Dy - \alpha y e^{-\alpha x}\right) = 0$, lo cual

significa que $D^r(e^{-\alpha x}((D-\alpha I)\,y)) = 0$, o sea que $D^r(e^{-\alpha x}z) = 0$ con $z = (D-\alpha I)\,y$, por inducción entonces se tiene que $(D-\alpha I)^r z = 0$, es decir, $(D-\alpha I)^r\,(D-\alpha I)\,y = 0$, por lo tanto, $(D-\alpha I)^{r+1}y = 0$.
También, mediante inducción sobre r se demuestra que

$$D^r y = 0 \Leftrightarrow y = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{r-1}x^{r-1}.$$

En consecuencia, el aspecto general de una solución de la ecuación (2) es

$$y = f(x) = e^{\alpha x}(b_0 + b_1 x + \cdots + b_{r-1}x^{r-1}),$$

es decir, el espacio solución de (2) es la envolvente lineal del conjunto de vectores

$$\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^{r-1}e^{\alpha x}\},$$

los cuales son L I.
Aplicando estas conclusiones a los espacios W_i se tiene que $\dim(W_i) = r_i$ y

$$\{e^{\alpha_i x}, xe^{\alpha_i x}, \ldots, x^{r_i-1}e^{\alpha_i x}\}$$

es una base para W_i. Por lo tanto, $\dim(W) = r_1 + \cdots + r_k = n$ y además

$$\{e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}, \ldots, x^{r_1-1}e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_k x}, xe^{\alpha_k x}, \ldots, x^{r_k-1}e^{\alpha_k x}\}$$

es una base de W.
Ejemplo 1. (a) Calcular la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

El polinomio asociado a esta ecuación es

$$x^3 - 2x^2 - 3x$$

cuya factorización completa es

$$x\,(x+1)\,(x-3)$$

Por lo tanto, la solución general del la ecuación diferencial es

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}.$$

(b) Calcular la solución general de la ecuación diferencial

$$y'''' + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$$

El polinomio asociado a esta ecuación es

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

cuya factorización completa es

$$(x+1)^4$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x} + c_4x^3e^{-x}.$$

b. Sistemas diagonalizables de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Consideremos ahora sistemas de ecuaciones diferenciales de tipo especial. Sean $y_1, ..., y_n$ funciones diferenciables en un intervalo real (a,b) , $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz real de orden $n \geq 1$ y sea $B \in M_{n1}(\mathbb{R})$ una matriz columna real.
El sistema

$$\frac{dY}{dx} = AY \text{ definido por}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

se denomina *sistema homogneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.*
Notemos que el conjunto solución V de (3) es un subespacio vectorial de $C(a,b) \oplus \cdots \oplus C(a,b)$, en efecto, V no es vacío ya que el arreglo nulo $0 = (0, ..., 0)$ de funciones nulas satisface el sistema homogeneo. De otra parte, si Y, U son soluciones del sistema homogeneo, entonces claramente el arreglo suma $Y + U$ es nuevamente una solución. En la misma forma si a es un real entonces $a.Y \in V$.
Un sistema homogeneo se dice *diagonalizable* si la matriz A es diagonalizable. Sea $\frac{dY}{dx} = AY$ un sistema diagonalizable tal que $C^{-1}AC = D = diag\,(d_1, ..., d_n)$. Entonces la solución general del sistema homogeneo es

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} c_1e^{d_1x} \\ \vdots \\ c_ne^{d_nx} \end{bmatrix}$$

donde $c_1, ..., c_n$ son constantes reales.
En efecto, El sistema $\frac{dY}{dx} = AY$ se puede escribir en la forma $C^{-1}\frac{dY}{dx} = DC^{-1}Y = D\,(C^{-1}Y)$, pero como C^{-1} tiene entradas constantes entonces $C^{-1}\frac{dY}{dx} = \frac{d}{dx}\,(C^{-1}Y) = D\,(C^{-1}Y)$. Hacemos el cambio $W = C^{-1}Y$ y resulta el sistema $\frac{dW}{dx} = DW$. Puesto que D es diagonal se obtiene el sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{dw_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dw_n}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

el cual tiene solución

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{d_1 x} \\ \vdots \\ c_n e^{d_n x} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $Y = CW$, la afirmación está probada.

Ejemplo 2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_3 \\ \frac{dy_3}{dt} &= -6y_1 - 11y_2 - 6y_3 \end{aligned}$$

donde adicionalmente se deben cumplir las condiciones iniciales

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0$$

Solución. La versión matricial de este sistema es

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = AY$$

Calculamos el polinomio mínimo de $A : x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+3)(x+2)(x+1)$, esto muestra que A es diagonalizable, y la matriz diagonalizante C es la matriz de vectores propios:

$$\text{vectores propios :} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -2, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -3$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

La solución general del sistema dado es entonces

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{-2t} \\ c_3 e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-3t} \\ y_2 &= -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} - 3c_3 e{-}^{3t} \\ y_3 &= c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{-2t} + 9c_3 e^{-3t} \end{aligned}$$

Por las condiciones iniciales adicionales se debe tener que

$$\begin{aligned}1 &= c_1 + c_2 + c_3\\ 0 &= -c_1 - 2c_2 - 3c_3\\ 0 &= c_1 + 4c_2 + 9c_3\end{aligned}$$

cuya solución es $h_1 = 3, h_2 = -3, h_3 = 1$. Por lo tanto, la solcuión del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{aligned}y_1 &= 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t}\\ y_2 &= -3e^{-t} + 6h_2e^{-2t} - 3e-^{3t}\\ y_3 &= 3e^{-t} - 12e^{-2t} + 9e^{-3t}.\end{aligned}$$

d. Sistemas de Jordan de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Un sistema homogeneo se dice de *Jordan* si la matriz A es un bloque elemental de Jordan. Sea $\frac{dY}{dx} = AY$ un sistema de Jordan de la forma

$$\begin{bmatrix}\frac{dy_1}{dx}\\ \vdots\\ \frac{dy_n}{dx}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & a & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & 1 & \ddots & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & \ddots & a & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix} \tag{4}$$

Entonces, la solución general del sistema es

$$y_k = \left(\frac{c_1}{(k-1)!}x^{k-1} + \frac{c_2}{(k-2)!}x^{k-2} + \cdots + c_{k-1}x + c_k\right)e^{ax}, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{5}$$

donde $c_1, ..., c_n$ son constantes reales arbitrarias.
En efecto, la primera ecuación en (4) es $\frac{dy_1}{dx} = ay_1$, luego

$$y_1 = ce^{ax}.$$

La segunda ecuación es $\frac{dy_2}{dx} = y_1 + ay_2$, pero consideremos

$$\begin{aligned}\frac{d\left(e^{-ax}y_2\right)}{dx} &= -ay_2e^{-ax} + e^{-ax}\frac{dy_2}{dx}\\ &= -ay_2e^{-ax} + e^{-ax}\left(y_1 + ay_2\right)\\ &= -ay_2e^{-ax} + e^{-ax}\left(ce^{ax} + ay_2\right)\\ &= -ay_2e^{-ax} + c + ay_2e^{-ax}\\ &= c.\end{aligned}$$

Esto implica que $e^{-ax}y_2$ es de la forma $e^{-ax}y_2 = c_1x + c_2$, de donde

$$y_2 = (c_1x + c_2)\, e^{ax}.$$

Veamos un paso mas: $\frac{dy_3}{dx} = y_2 + ay_3$ y consideremos la derivada de $e^{-ax}y_3$:

$$\begin{aligned}
-ay_3e^{-ax} + e^{-ax}\frac{dy_3}{dx} &= -ay_3e^{-ax} + e^{-ax}(y_2 + ay_3) \\
&= e^{-ax}y_2 = e^{-ax}(c_1x + c_2)\, e^{ax} \\
&= c_1x + c_2,
\end{aligned}$$

por tanto $e^{-ax}y_3 = \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3$, es decir,

$$y_3 = \left(\frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3\right) e^{ax}.$$

Continuando de esta forma obtenemos la fórmula (5).

Ejemplo 3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= 2y_3 \\
\frac{dy_2}{dt} &= y_1 + 2y_4 \\
\frac{dy_3}{dt} &= 4y_4 \\
\frac{dy_4}{dt} &= y_3
\end{aligned}$$

donde adicionalmente se deben cumplir las condiciones iniciales

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 2, y_4(0) = 1$$

Solución. La forma matricial del sistema es

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dy_3}{dt} \\ \frac{dy_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = AY$$

Calculamos el polinomio mínimo de A: $x^4 - 4x^2 = x^2(x-2)(x+2)$. El sistema de ecuaciones no es diagonalizable. Calculemos entonces la forma de Jordan de A, se tienen entonces 3 bloques de Jordan pertenecientes a los valores propios $0, 2, -2$. Caculemos los espacios propios:

$$\text{vectores propios:} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -2, \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 2$$

Cada bloque tiene una sola celda elemental de Jordan, y para el valor 0 la celda es de tamaño igual a 2. La matriz J de Jordan es entonces

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Existe entonces una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC = J$, por lo tanto, $A = CJC^{-1}$ con lo cual $\frac{dY}{dt} = AY = CJC^{-1}Y$, luego $C^{-1}\frac{dY}{dt} = J\left(C^{-1}Y\right)$, es decir, $\frac{d\left(C^{-1}Y\right)}{dt} = J\left(C^{-1}Y\right)$. Haciendo el cambio

$$Z = C^{-1}Y$$

se tiene que

$$\frac{dZ}{dt} = JZ$$

y para este sistema de ecuaciones diferenciales la solución se puede calcular usando (5) en cada celda de Jordan. Una vez se tengan las soluciones Z entonces podemos finalizar el ejercicio mediante la identidad

$$Y = CZ.$$

Por lo tanto, debemos calcular la matriz C: recordemos que

$$\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$$

donde

$$\begin{aligned} W_1 &= \ker\left(A^2\right) \\ W_2 &= \ker\left(A - 2E\right) =< (2,2,2,1) > \\ W_3 &= \ker\left(A + 2E\right) =< (2,-2,-2,1) > \end{aligned}$$

Para W_1 necesitamos la descomposición cíclica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \ker(A^2) =< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} >$$

Pero en este caso la descomposión cíclica de W_1 tiene un solo sumando ya que el operador $N_1 = A : W_1 \to W_1$ es tal que $\dim\left(\ker(N_1)\right) = \dim\left(E\left(0\right)\right) = 1$. Por lo tanto, en este caso necesitamos un vector $w_1 \in W_1$ tal que $[w_1] = W_1$, se puede entonces tomar $w_1 = e_1$ y de esta forma

$$W_1 = [e_1] = < e_1, Ae_1 > = < (1,0,0,0), (0,1,0,0) >$$

Se tiene entonces que

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos ya calcular la solución:

$$\frac{dZ}{dt} = JZ \Rightarrow$$

$$\frac{dZ}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \\ \frac{dz_3}{dt} \\ \frac{dz_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Para cada celda aplicamos (5): $z_k = \left(\frac{c_1}{(k-1)!} t^{k-1} + \frac{c_2}{(k-2)!} t^{k-2} + \cdots + c_{k-1} t + c_k \right) e^{at}$

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{c_1}{(1-1)!} t^{1-1} \right) e^{0t} = c_1 \\ z_2 &= \left(\frac{c_1}{(2-1)!} t^{2-1} + \frac{c_2}{(2-2)!} t^{2-2} \right) e^{0t} = c_1 t + c_2 \\ z_3 &= \left(\frac{c_1}{(1-1)!} t^{1-1} \right) e^{2t} = c_3 e^{2t} \\ z_4 &= \left(\frac{c_1}{(1-1)!} t^{1-1} \right) e^{-2t} = c_4 e^{-2t} \end{aligned}$$

La solución general viene entonces dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 t + c_2 \\ c_3 e^{2t} \\ c_4 e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 + 2c_3 e^{2t} + 2c_4 e^{-2t} \\ c_2 + tc_1 + 2c_3 e^{2t} - 2c_4 e^{-2t} \\ 2c_3 e^{2t} - 2c_4 e^{-2t} \\ c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, debemos considerar las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
1 &= c_1 + 2c_3 + 2c_4 \\
0 &= c_2 + 2c_3 - 2c_4 \\
2 &= 2c_3 - 2c_4 \\
1 &= c_3 + c_4
\end{aligned}$$

cuya solución es $c_1 = -1, c_2 = -2, c_3 = 1, c_4 = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
y_1 &= -1 + 2e^{2t} \\
y_2 &= -2 - t + 2e^{2t} \\
y_3 &= 2e^{2t} \\
y_4 &= e^{2t}.
\end{aligned}$$