

Álgebra Lineal

Capítulo 11. Tópicos Especiales y Aplicaciones

11.4. Producto tensorial de espacios vectoriales y matrices

En esta lección definimos el producto tensorial de espacios vectoriales, transformaciones lineales y matrices. Dos preliminares son necesarios para esta definición.

a. Espacio cociente.

Definición 1. Sea V un K -espacio y sea W un subespacio de V , se define en V la relación de equivalencia inducida por W en la siguiente forma

$$v_1 \equiv v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$$

Esta relación particiona al conjunto V en clases de equivalencia denotadas por $\bar{v}$, es decir,

$$\bar{v} = \{u \in V \mid u \equiv v\} = v + W = \{v + w \mid w \in W\}.$$

El conjunto de estas clases de equivalencia se denota por V/W , es decir,

$$V/W = \{\bar{v} \mid v \in V\}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 = \bar{v}_2 &\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W \\ \bar{v} = \bar{0} &\Leftrightarrow v \in W.\end{aligned}$$

Este conjunto cociente tiene estructura de K -espacio vectorial.

Proposición 1. V/W es un espacio vectorial sobre K respecto de las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}\bar{v} + \bar{v}' &= \overline{v + v'}, \quad v, v' \in V \\ a.\bar{v} &= \overline{a.v}, \quad a \in K.\end{aligned}$$

Veamos algunas propiedades de esta construcción.

Proposición 2. (a) La función canónica

$$\begin{aligned}J : V &\rightarrow V/W \\ v &\mapsto \bar{v}\end{aligned}$$

es una transformación lineal.

(b) Si V es de dimensión finita, entonces

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W).$$

En forma más precisa, si $X' = \{x_1, \dots, x_m\}$ es una base de W y $X = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ es una base de V , entonces $X'' = \{\overline{x_{m+1}}, \dots, \overline{x_n}\}$ es una base de V/W .

(c) Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal y sea W un subespacio invariante de V . Sean X'', X', X como en el literal anterior. Entonces, la matriz de T en la base X es de la forma

$$m_X(T) = \begin{bmatrix} m_{X'}(T') & * \\ & m_{X''}(\overline{T}) \end{bmatrix}$$

donde T' es la restricción de T a W , y $\overline{T} : V/W \rightarrow V/W$ es la transformación inducida definida por

$$\overline{T}(\overline{v}) = \overline{T(v)}$$

b. Propiedad universal de las bases y $K^{(X)}$

El Teorema 2 de la Lección 2 del Capítulo 2 establece la propiedad universal de una base X de un espacio vectorial V en el sentido que cada función t de X en un espacio W se extiende en forma única a una transformación lineal $T : V \rightarrow W$, de tal forma que $T(x) = t(x)$, para cada $x \in X$. De otra parte, recordemos que si K es un cuerpo y X es un conjunto no vacío cualquiera, entonces $K^{(X)}$ denota el espacio vectorial con base canónica $X = \{e_x\}_{x \in X}$, donde $e_x = (k_z)_{z \in X}$ y $k_z = 0$ si $z \neq x$ y $k_x = 1$.

Podemos ya emprender la construcción del producto tensorial de dos espacios vectoriales.

c. Producto tensorial de dos espacios vectoriales.

Sean U, V dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K , sea X el producto cartesiano de los conjuntos U y V , es decir, $X = U \times V$. Notemos que en el conjunto X hemos olvidado las estructuras de K -espacio que tienen U y V , a estos últimos los estamos tomando simplemente como conjuntos no vacíos. Consideremos entonces el K -espacio vectorial $K^{(X)}$ con base canónica $Z = \{e_x\}_{x \in X}$, donde e_x es un arreglo de $K^{(X)}$ definido por $e_x = (k_z)_{z \in X}$ y $k_z = 0$ si $z \neq x$ y $k_x = 1$. Notemos que los elementos de X son parejas, es decir, un elemento $x \in X$ es de la forma $x = (u, v)$. En otras palabras, el conjunto de índices X es un producto cartesiano de dos conjuntos, y $e_x = e_{(u,v)}$ denota el arreglo que tiene solamente una entrada no nula, la ubicada en la "posición (u, v) ", en donde colocamos el escalar $1 \in K$. Notemos entonces que un elemento de $K^{(X)}$ es una combinación lineal finita en la forma

$$r_1 e_{(u_1, v_1)} + \dots + r_t e_{(u_t, v_t)}.$$

Observemos que el elemento anterior es un arreglo finito que tiene ubicados en la posición (u_1, v_1) al escalar r_1 , en la posición (u_2, v_2) al escalar r_2 , ..., en la posición (u_t, v_t) al escalar r_t y en todas las demás posiciones al escalar cero.

Esta notación puede ser simplificarla de la siguiente manera: representemos el elemento $e_{(u,v)}$ de la base canónica Z simplemente por (u, v) de tal forma que veamos a $U \times V$ como la base canónica de $K^{(X)}$ y a las parejas (u, v) como los elementos de esta base canónica. Así pues, podemos pensar en $K^{(U \times V)}$ y considerar que la base canónica es $U \times V$. Con esta notación podemos decir que un elemento de $K^{(U \times V)}$ es una combinación lineal finita de la forma

$$r_1 (u_1, v_1) + \cdots + r_t (u_t, v_t)$$

donde $r_1, \dots, r_t \in K$.

Sea S el subespacio de $K^{(U \times V)}$ generado por todos los elementos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (u + u', v) - (u, v) - (u', v) \\ (u, v + v') - (u, v) - (u, v') \\ r(u, v) - (ru, v) \\ r(u, v) - (u, rv) \end{aligned} \quad (1)$$

y sea $U \otimes V$ el K -espacio vectorial cociente correspondiente, es decir,

$$U \otimes V = K^{(U \times V)} / S$$

Denotemos por $u \otimes v$ a la clase de equivalencia $\overline{(u, v)}$ del cociente $U \otimes V = K^{(U \times V)} / S$. Entonces en $U \otimes V$ se tienen las siguientes propiedades fundamentales.

Proposición 3. Para cualesquiera elementos $u, u' \in U, v, v' \in V$ y $r \in K$ se tiene que

- (i) $(u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v$
- (ii) $u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v'$
- (iii) $r(u \otimes v) = ru \otimes v$
- (iv) $r(u \otimes v) = u \otimes rv$

Corolario 1. La función canónica

$$\begin{aligned} t : U \times V &\rightarrow U \otimes V \\ (u, v) &\mapsto u \otimes v \end{aligned}$$

es bilineal en cada argumento.

Definición 2. El espacio vectorial $U \otimes V$ se denomina el producto tensorial de U con V . Observemos como es un elemento cualquiera de $U \otimes V$: sea $\bar{z}$ un elemento de $U \otimes V$, con $z \in K^{(U \times V)}$, entonces z es de la forma $z = r_1 (u_1, v_1) + \cdots + r_t (u_t, v_t)$, por lo tanto en el cociente $U \otimes V = K^{(U \times V)} / S$ se tiene que

$$\bar{z} = r_1 u_1 \otimes v_1 + \cdots + r_t u_t \otimes v_t$$

pero como $r_1 u_1, \dots, r_t u_t \in U$, entonces podemos siempre asumir que $\bar{z}$ es de la forma

$$u_1 \otimes v_1 + \dots + u_t \otimes v_t.$$

El producto tensorial tiene la siguiente propiedad universal.

Teorema 1. Sea W un K -espacio y sea $f : U \times V \rightarrow W$ una función bilineal. Entonces, existe una única transformación lineal $F : U \otimes V \rightarrow W$ tal que $F \circ t = f$:

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{t} & U \otimes V \\ f \searrow & & \downarrow F \\ & & W \end{array}$$

La transformación lineal F viene dada por

$$F(u \otimes v) = f(u, v).$$

Demostración. La función f definida sobre la base canónica $U \times V$ de $K^{(U \times V)}$ induce una única transformación lineal $F' : K^{(U \times V)} \rightarrow W$ definida por $F'(u, v) = f(u, v)$. Definimos entonces la función $F(\bar{z}) = F'(z)$, donde $z \in K^{(U \times V)}$. En particular, si $z = (u, v)$ es un básico, entonces $F(u \otimes v) = F'(u, v) = f(u, v)$. Debemos ver que F está bien definida. Sean $z_1, z_2 \in K^{(U \times V)}$ tales que $\bar{z}_1 = \bar{z}_2$, entonces $z_1 - z_2 \in S$ y por lo tanto $z_1 - z_2$ es una K -combinación lineal de elementos como en (1). Como F' es K -lineal, basta considerar cada una de las cuatro relaciones de (1) por separado. Si $z_1 - z_2 = (u + u', v) - (u, v) - (u', v)$, entonces

$$\begin{aligned} F'(z_1 - z_2) &= F'[(u + u', v) - (u, v) - (u', v)] \\ &= f(u + u', v) - f(u, v) - f(u', v) \\ &= 0, \quad \text{ya que } f \text{ es bilineal.} \end{aligned}$$

De igual manera se consideran los otros tres casos de (1). Esto muestra que $F'(z_1 - z_2) = 0$, es decir, $F'(z_1) = F'(z_2)$, y F está bien definida.

De otra parte, como F' es K -lineal, entonces F es una transformación lineal. Además, $F \circ t(u, v) = F(u \otimes v) = f(u, v)$, esto muestra que $F \circ t = f$.

Para terminar la prueba, sea G otra transformación lineal $G : U \otimes V \rightarrow W$ tal que $G \circ t = f$, entonces como G es una transformación lineal basta considerar el caso $u \otimes v$. Así pues, $G \circ t(u, v) = f(u, v)$, es decir, $G(u \otimes v) = f(u, v) = F(u \otimes v)$. $\square$

Presentamos a continuación otras propiedades interesantes del producto tensorial.

Teorema 2. Sean U y V dos espacios vectoriales de dimensión finita n y m con bases $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, respectivamente. Entonces, $X \otimes Y = \{x_i \otimes y_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ es una base de $U \otimes V$, y en consecuencia, $\dim_K(U \otimes V) = nm$.

Demostración. Consideremos el K -espacio vectorial canónico K^{nm} de dimensión nm ; notemos que K^{nm} está conformado por arreglos finitos de nm entradas de K pegando en forma sucesiva m arreglos de tamaño n . La base canónica de K^{nm} se puede entonces representar por $Z = \{e_{1,1}, \dots, e_{1,m}, e_{2,1}, \dots, e_{2,m}, \dots, e_{n,1}, \dots, e_{n,m}\}$, donde el vector $e_{i,j}$ tiene ubicado al 1 en la entrada $(i-1)m + j$, y las demás entradas son nulas. Definimos entonces la transformación lineal

$$T : K^{nm} \rightarrow K^{(U \times V)}$$

$$e_{i,j} \mapsto x_i \otimes y_j, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

De otra parte, consideremos la función

$$f : U \times V \rightarrow K^{nm}$$

$$f(u, v) = a_1 b_1 e_{11} + \dots + a_1 b_m e_{1m}$$

$$+ a_2 b_1 e_{21} + \dots + a_2 b_m e_{2m}$$

$$\vdots$$

$$+ a_n b_1 e_{n1} + \dots + a_n b_m e_{nm}$$

donde $u = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ y $v = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$. Es facil ver que f es bilineal. Por el Teorema 1 existe una transformación lineal $F : U \otimes V \rightarrow K^{nm}$ definida por $F(u \otimes v) = f(u, v) = a_1 b_1 e_{11} + \dots + a_1 b_m e_{1m} + \dots + a_n b_1 e_{n1} + \dots + a_n b_m e_{nm}$. Pero notemos que $F \circ T = I_{K^{nm}}$ y también $T \circ F = I_{U \otimes V}$. Esto demuestra que T es un isomorfismo de espacios vectoriales, con lo cual $X \otimes Y$ es una base de $U \otimes V$ y $\dim_K(U \otimes V) = nm$. $\square$

d. Producto tensorial de transformaciones lineales y matrices

Sean $T : U \rightarrow U'$ y $F : V \rightarrow V'$ transformaciones lineales donde $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de U , $X' = \{x'_1, \dots, x'_p\}$ es una base de U' , $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ una base de V y $Y' = \{y'_1, \dots, y'_q\}$ una base de V' . Entonces la función

$$T \times F : U \times V \rightarrow U' \otimes V'$$

$$(u, v) \mapsto T(u) \otimes F(v)$$

es bilineal y por lo tanto induce una transformación lineal

$$T \otimes F : U \otimes V \rightarrow U' \otimes V'$$

$$u \otimes v \mapsto T(u) \otimes F(v)$$

La transformación $T \otimes F$ se conoce como el producto tensorial de T con F . Se tiene entonces la siguiente propiedad.

Teorema 3. Con la notación anterior se tiene que

$$m_{X \otimes Y, X' \otimes Y'}(T \otimes F) = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1}B & a_{pn}B \end{bmatrix}$$

donde $A = [a_{ij}] = m_{X, X'}(T)$ y $B = [b_{ij}] = m_{Y, Y'}(F)$. La matriz de $T \otimes F$ se conoce como el producto tensorial de las matrices A y B y se denota por $A \otimes B$, es decir,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1}B & a_{pn}B \end{bmatrix}$$

Notemos que $A \otimes B$ es de orden $pq \times nm$.

Demostración. Basta aplicar $T \otimes F$ a los vectores de la base $X \otimes Y$ y expresar los resultados a través de la base $X' \otimes Y'$. $\square$

Ejemplo 1. Sean $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ las transformaciones lineales definidas por

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (2x + 3y, 3x + 4z) \\ F(x, y) &= (x, x + y, y, y - x) \end{aligned}$$

Calcular la matriz de $T \otimes F$ en las bases canónicas.

Solución. Basta calcular las matrices A y B de las transformaciones T y F en las bases canónicas:

$$\begin{aligned} A = m(T) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ B = m(F) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ m(T \otimes F) = A \otimes B &= \begin{bmatrix} 2B & 3B & 0B \\ 3B & 0B & 4B \end{bmatrix} \\ m(T \otimes F) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e. Otras propiedades del producto tensorial

En adelante consideraremos que los espacios vectoriales son de dimensión finita.

(i) Sean $T : U \rightarrow U'$ y $F : V \rightarrow V'$ transformaciones lineales sobreyectivas. Entonces, $T \otimes F$ es sobreyectiva. En efecto, si $u' \otimes v' \in U' \otimes V'$, entonces existe $u \in U$ y $v \in V$ tales que $T(u) = u'$, $F(v) = v'$. Por lo tanto, $(T \otimes F)(u \otimes v) = T(u) \otimes F(v) = u' \otimes v'$.

(ii) Sean $T : U \rightarrow U'$ y $F : V \rightarrow V'$ transformaciones lineales, entonces $\ker(T \otimes F) = \ker(T) \otimes V + U \otimes \ker(F)$. Veamos la demostración: denotemos por $W = \ker(T) \otimes V + U \otimes \ker(F)$, este es un subespacio de $U \otimes V$. Es claro que $W \subseteq \ker(T \otimes F)$, probemos entonces la inclusión recíproca. Para esto consideremos el espacio cociente $(U \otimes V)/W$, y la transformación lineal canónica

$$J : U \otimes V \rightarrow (U \otimes V)/W$$

$$z \mapsto \bar{z}$$

Para el producto tensorial $\text{Im}(T) \otimes \text{Im}(F)$ consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}(T) \times \text{Im}(F) & \xrightarrow{t'} & \text{Im}(T) \otimes \text{Im}(F) \\ f \searrow & & \downarrow H \\ & & (U \otimes V)/W \end{array}$$

donde $f(T(u), F(v)) = J(u \otimes v)$. Debemos ver que f está bien definida. Sea $T(u_1) = T(u)$ y $F(v_1) = F(v)$, por lo tanto, $u_1 - u = u_2 \in \ker(T)$ y $v_1 - v = v_2 \in \ker(F)$, luego

$$\begin{aligned} u_1 \otimes v_1 &= (u + u_2) \otimes (v + v_2) \\ &= u \otimes v + u \otimes v_2 + u_2 \otimes v + u_2 \otimes v_2 \\ &= u \otimes v + (u \otimes v_2 + u_2 \otimes v + u_2 \otimes v_2) \end{aligned}$$

donde $u \otimes v_2 + u_2 \otimes v + u_2 \otimes v_2 \in U \otimes \ker(F) + \ker(T) \otimes V = W$, esto muestra que

$$u_1 \otimes v_1 - u \otimes v \in W$$

luego, $J(u \otimes v) = J(u_1 \otimes v_1)$.

Notemos que f es bilineal, por lo tanto induce la transformación lineal H dada por

$$\begin{aligned} H(T(u) \otimes F(v)) &= f(T(u), F(v)) = J(u \otimes v) \Rightarrow \\ H \circ (T \otimes F) &= J \end{aligned}$$

Sea entonces $z \in \ker(T \otimes F)$, entonces $H \circ (T \otimes F)(z) = H(0) = \bar{0} = J(z) = \bar{z}$, lo cual indica que $z \in W$.

(iii) Sean $T_1 : U_1 \rightarrow U_2, T_2 : U_2 \rightarrow U_3$ y $F_1 : V_1 \rightarrow V_2, F_2 : V_2 \rightarrow V_3$ transformaciones lineales, entonces

$$(T_2 \circ T_1) \otimes (F_2 \circ F_1) = (T_2 \otimes F_2) \circ (T_1 \otimes F_1).$$

En forma matricial,

$$A_2 A_1 \otimes B_2 B_1 = (A_2 \otimes B_2) (A_1 \otimes B_1)$$

(iv) Si $I_U : U \rightarrow U$ es la idéntica de U e $I_V : V \rightarrow V$, entonces

$$I_U \otimes I_V = I_{U \otimes V}.$$

En forma matricial,

$$E_n \otimes E_m = E_{nm}.$$

(v) Sean $T : U \rightarrow U'$ y $F : V \rightarrow V'$ transformaciones lineales biyectivas, entonces

$$(T \otimes F)^{-1} = T^{-1} \otimes F^{-1}.$$

Matricialmente,

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

(vi) Sean T y F_1, F_2 transformaciones lineales compatibles para las operaciones indicadas, entonces

$$T \otimes (F_1 + F_2) = T \otimes F_1 + T \otimes F_2.$$

En forma matricial,

$$A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2.$$

En forma similar se tienen las distributivas por el lado derecho.

(vii) Sean $T : U \rightarrow U'$ y $F : V \rightarrow V'$ transformaciones lineales y sea $\lambda \in K$, entonces

$$(\lambda.T) \otimes F = T \otimes (\lambda.F) = \lambda.(T \otimes F).$$

(viii) Sean $A \in M_n(K)$ y $B \in M_m(K)$, entonces

$$\begin{aligned} \text{tr}(A \otimes B) &= \text{tr}(A) \text{tr}(B), \\ \det(A \otimes B) &= \det(A)^m \det(B)^n. \end{aligned}$$

(ix) Sean $A, C \in M_n(K)$ y $B, D \in M_m(K)$, tales que A y C son similares y B y D son similares, entonces

$A \otimes B$ es similar a $C \otimes D$.

(x) Sean $A \in M_n(K)$, $B \in M_m(K)$, α un valor propio de A con vector columna propio u y β un valor propio de B con vector columna propio v . Entonces, $u \otimes v$ es un vector propio de $A \otimes B$ con valor propio $\alpha\beta$.

(xi) Sean $A \in M_n(K)$, $B \in M_m(K)$ matrices diagonalizables, entonces $A \otimes B$ es diagonalizable.

(xii) Sean U y V espacios con bases $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$, respectivamente. Entonces

$$U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*$$

Veamos la prueba de este isomorfismo.

Sean $\alpha \in U^*$ y $\beta \in V^*$, definimos entonces la función

$$\begin{aligned} f_{\alpha, \beta} : U \times V &\rightarrow K \\ f_{\alpha, \beta}(u, v) &= \alpha(u) \beta(v) \end{aligned}$$

Notemos que $f_{\alpha, \beta}$ es bilineal, por lo tanto induce una única transformación lineal

$$\begin{aligned} F_{\alpha, \beta} : U \otimes V &\rightarrow K \\ F_{\alpha, \beta}(u \otimes v) &= \alpha(u) \beta(v) \end{aligned}$$

Esto indica que $F_{\alpha, \beta} \in (U \otimes V)^*$; se define entonces la función

$$\begin{aligned} \tilde{f} : U^* \times V^* &\rightarrow (U \otimes V)^* \\ (\alpha, \beta) &\mapsto F_{\alpha, \beta} \end{aligned}$$

Notemos que $\tilde{f}$ es bilineal, y por lo tanto induce una transformación lineal

$$\begin{aligned} \tilde{F} : U^* \otimes V^* &\rightarrow (U \otimes V)^* \\ \tilde{F}(\alpha \otimes \beta) &= F_{\alpha, \beta} \Rightarrow \\ \tilde{F}(\alpha \otimes \beta)(u \otimes v) &= F_{\alpha, \beta}(u \otimes v) = \alpha(u) \beta(v) \end{aligned}$$

Sean $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ y $Y^* = \{y_1^*, \dots, y_m^*\}$ las bases duales en U^* y V^* , respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(x_i^* \otimes y_j^*)(x_r \otimes y_s) &= x_i^*(x_r) y_j^*(y_s) \\
&= 1 \text{ si } i = r \text{ y } j = s \\
&= 0, \text{ en otro caso}
\end{aligned}$$

Sabemos que $\{x_i^* \otimes y_j^* \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ es una base de $U^* \otimes V^*$ y por lo anterior, $\tilde{F}(x_i^* \otimes y_j^*) = (x_i \otimes y_j)^*$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Es decir, $\tilde{F}$ es una transformación lineal que envía una base en una base, por lo tanto, $\tilde{F}$ es biyectiva.

f. Una aplicación del producto tensorial de matrices

Sean A, B y C matrices complejas de tamaños $n \times n, m \times m$ y $n \times m$ respectivamente. Supóngase que para cada valor propio α de A y cada valor propio β de B se cumple que $\alpha + \beta \neq 0$. Demostrar entonces que la ecuación matricial $AX + XB = C$ tiene solución única.

Solución. Consideremos el $\mathbb{C}$ -espacio de matrices rectangulares $M_{nm}(\mathbb{C})$, definamos la función T por

$$\begin{aligned}
T : M_{nm}(\mathbb{C}) &\rightarrow M_{nm}(\mathbb{C}) \\
X &\mapsto AX + XB
\end{aligned}$$

Notemos que T es una transformación lineal. Para resolver el problema mostraremos que T es biyectiva, con esto, dada $C \in M_{nm}(\mathbb{C})$ existe una única $X \in M_{nm}(\mathbb{C})$ tal que $AX + XB = C$.

La prueba de la biyectividad de T la haremos a través de su matriz en la base canónica $\mathcal{B} = \{E_{11}, \dots, E_{1m}; \dots; E_{n1}, \dots, E_{nm}\}$ de $M_{nm}(\mathbb{C})$, es decir, probaremos que $m_{\mathcal{B}}(T)$ es invertible. Notemos entonces que

$$m_{\mathcal{B}}(T) = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{E}_m & \cdots & a_{1n}\mathbf{E}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{E}_m & \cdots & a_{nn}\mathbf{E}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & B^T \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{E}_m$ es la idéntica de orden m y B^T es la transpuesta de B . Pero,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{E}_m & \cdots & a_{1n}\mathbf{E}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{E}_m & \cdots & a_{nn}\mathbf{E}_m \end{bmatrix} &= A \otimes \mathbf{E}_m \\
\begin{bmatrix} B^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & B^T \end{bmatrix} &= \mathbf{E}_n \otimes B^T
\end{aligned}$$

De esta forma

$$m_{\mathcal{B}}(T) = A \otimes \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_n \otimes B^T$$

Puesto que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado existen matrices invertibles F y G de tamaños $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente, tales que $F^{-1}AF = S_1$ y $G^{-1}B^TG = S_2$ son matrices triangulares superiores. Notemos que en la diagonal de S_1 y S_2 están localizados los valores propios α de A y β de B^T , respectivamente (notemos que los valores propios de B^T son los mismos de B). Ahora notemos que

$$\begin{aligned} S_1 \otimes \mathbf{E}_m &= (F^{-1}AF) \otimes \mathbf{E}_m = (F^{-1} \otimes \mathbf{E}_m) (A \otimes \mathbf{E}_m) (F \otimes \mathbf{E}_m) \\ \mathbf{E}_n \otimes S_2 &= \mathbf{E}_n \otimes (G^{-1}B^TG) = (\mathbf{E}_n \otimes G^{-1}) (\mathbf{E}_n \otimes B^T) (\mathbf{E}_n \otimes G) \end{aligned}$$

donde además

$$\begin{aligned} (F^{-1} \otimes \mathbf{E}_m) &= (F \otimes \mathbf{E}_m)^{-1} \\ (\mathbf{E}_n \otimes G^{-1}) &= (\mathbf{E}_n \otimes G)^{-1} \end{aligned}$$

De esta forma se tiene que

$$\begin{aligned} S_1 \otimes \mathbf{E}_m &= (F \otimes \mathbf{E}_m)^{-1} (A \otimes \mathbf{E}_m) (F \otimes \mathbf{E}_m) \\ \mathbf{E}_n \otimes S_2 &= (\mathbf{E}_n \otimes G)^{-1} (\mathbf{E}_n \otimes B^T) (\mathbf{E}_n \otimes G) \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $m_{\mathcal{B}}(T) = A \otimes \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_n \otimes B^T$, de donde $(F \otimes \mathbf{E}_m)^{-1} m_{\mathcal{B}}(T) (F \otimes \mathbf{E}_m) = (F \otimes \mathbf{E}_m)^{-1} (A \otimes \mathbf{E}_m) (F \otimes \mathbf{E}_m) + (F \otimes \mathbf{E}_m)^{-1} (\mathbf{E}_n \otimes B^T) (F \otimes \mathbf{E}_m) = (S_1 \otimes \mathbf{E}_m) + (F^{-1} \otimes \mathbf{E}_m) (\mathbf{E}_n \otimes B^T) (F \otimes \mathbf{E}_m) = (S_1 \otimes \mathbf{E}_m) + (\mathbf{E}_n \otimes B^T)$.

Ahora, $(\mathbf{E}_n \otimes G)^{-1} (F \otimes \mathbf{E}_m)^{-1} m_{\mathcal{B}}(T) (F \otimes \mathbf{E}_m) (\mathbf{E}_n \otimes G) = (\mathbf{E}_n \otimes G)^{-1} (S_1 \otimes \mathbf{E}_m) (\mathbf{E}_n \otimes G) + (\mathbf{E}_n \otimes G)^{-1} (\mathbf{E}_n \otimes B^T) (\mathbf{E}_n \otimes G) = (S_1 \otimes \mathbf{E}_m) + (\mathbf{E}_n \otimes S_2)$. En total,

$$(\mathbf{E}_n \otimes G)^{-1} (F \otimes \mathbf{E}_m)^{-1} m_{\mathcal{B}}(T) (F \otimes \mathbf{E}_m) (\mathbf{E}_n \otimes G) = (S_1 \otimes \mathbf{E}_m) + (\mathbf{E}_n \otimes S_2)$$

es decir,

$$(F \otimes G)^{-1} m_{\mathcal{B}}(T) (F \otimes G) = (S_1 \otimes \mathbf{E}_m) + (\mathbf{E}_n \otimes S_2).$$

Notemos que la matriz $(S_1 \otimes \mathbf{E}_m) + (\mathbf{E}_n \otimes S_2)$ es triangular superior y en su diagonal están las sumas de la forma $\alpha + \beta$, las cuales por hipótesis son no nulas, es decir, esta matriz es invertible, o sea que, $m_{\mathcal{B}}(T)$ es también invertible, y la prueba ha terminado. $\square$